LES FONCTIONS-DERIVATION-APPLICATIONS

Exercice I *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :*

1) f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Si pour tout réel x, $f'(x) = g'(x)$, alors pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.

2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

"Si pour tout réel x, $f'(x) \leqslant g'(x)$, alors, la courbe représentative de f est entièrement située en dessous de celle représentant g sur $\mathbb{R}$".

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

a) *" Pour tout réel $x \neq -1$, $h'(x) > 0$."*

b) *" Il existe au moins un réel x tel que $h'(x) = 0{,}25$."*

c) *"La courbe représentative de la fonction h admet une unique tangente horizontale".*

d) *Pour tout réel $x \neq -1$, $h'(x) \leq 1$.*

Exercice II

Déterminer les réels a, b, c et d, tels que, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dont la courbe représentative est notée $\mathscr{C}$, ait les propriétés suivantes :

- ✓ $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20.
- ✓ $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
- ✓ $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-1\ ;\ 18)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur vaut 3.

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + ax$, où a est un réel quelconque.

Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

Démontrer que la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+2}$ admet un maximum et un minimum sur cet intervalle dont on précisera les valeurs. Détailler votre démarche.

Exercice V Deux études de fonctions

A)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$.

1. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x \in [0;3]$.

B)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty$ par $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{x-2}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice VI

Partie A ***Etude d'une fonction.***

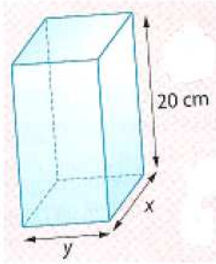
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 4x + \dfrac{2}{x} + 1$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Partie B ***Un problème d'optimisation.***

On veut construire des boîtes en carton, avec couvercle, ayant la forme d'un pavé droit et de volume 1 dm^3.



On impose de plus une hauteur de 20 *cm* au pavé.

x et y sont exprimés en dm.

a) Etablir que $y = \dfrac{1}{2x}$.

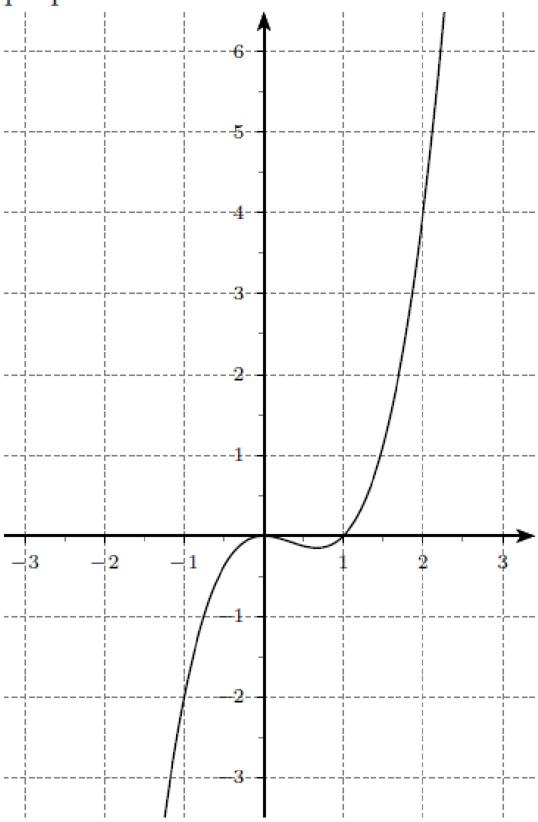
b) Exprimer en fonction de x uniquement l'aire totale des six faces du pavé.

c) En déduire les dimensions arrondies au *mm* près, de la boîte nécessitant le moins de carton possible.

Exercice VII

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère oij du plan.

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2. On la note T.
4. On donne ci-dessous la représentation graphique de f. Tracer la tangente T sur ce graphique.



5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.
   (a) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
   (b) En utilisant le minimum de g sur $[0; +\infty[$, démontrer que g est positive sur $[0; +\infty[$.
   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE VIII

Soit f la fonction définie sur $R \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
On donne en annexe sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur $[-4; 1[\cup]1; 4]$.

1. Déterminer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[-4; 1[\cup]1; 4]$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3. On note Δ cette tangente.
3. Donner suivant les valeurs de x la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ et tracer la droite Δ sur le graphique représentant la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Expliquer comment retrouver graphiquement la réponse à cette question.

EXERCICE IX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1) Ecrire le taux d'accroissement t(h) de f en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0. Si oui donner f '(0)
2) Calculer f '(x) pour x>0. En déduire les variations de f que l'on résumera sous forme de tableau.
3) Ecrire le taux d'accroissement $\tau(h)$ de g en 1. La fonction g est-elle dérivable en 0. Si oui donner g'(1).