LES SUITES

Exercice 1

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a) au 1er janvier 2005 ;
   b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0{,}85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Quelle est la valeur n affichée par l'algorithme ?

PARTIE B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.
   b) justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n, puis exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) Conjecturer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

Exercice 2 *(Les questions sont indépendantes)*

1) $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique telle que $u_2 = 41$ *et* $u_5 = -13$. Calculer u_{20} et u_0 puis déterminer $u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{20}$.

2) $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique telle que $u_7 = \frac{1}{1080}$ *et* $u_{10} = \frac{25}{2197}$. Calculer u_{30}.

3) Calculer les sommes :

a) S=$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + ... + 10.$ b) S'=0.02-0.1+0.5-2.5+….+312.5.

Exercice 3

$(u_n)_{n\in IN}$ est définie sur IN par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout $n \in IN$.

a) En utilisant le graphe de la fonction $f : x \mapsto 3x + 1$ dans un repère orthonormé et la droite Δ d'équation *y*=*x*, construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de (u_n). Quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de la suite ?

b) On pose pour tout $n \in IN$, $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est géométrique. Préciser sa raison.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*, puis celle de u_n en fonction de *n*. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in IN}$?

d) Exprimer $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de *n*.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer les termes u_1 et u_2.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2n + 4$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) Exprimer v_n en fonction de *n*, puis u_n en fonction de *n*.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (v_n) est arithmétique.

2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3) Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n, $n \geq n_0$, $u_n \leq 0.001$.
Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

A)

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+3u}{3+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

B) Tracer la courbe représentative C de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+3x}{3+x}$ sur $[0;+\infty[$ dans le repère orthonormé de l'annexe ci-dessous. Construire à l'aide du graphique sur l'axe des abscisses les termes u_1, u_2, u_3. Que conjecturer sur le sens de variation de f ?

C) On admet que $u_n > 1$ pour tout entier naturel *n.*

a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $1 < u_n \leq 2$.

D) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que $v_n \neq 1$.

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0.5. Préciser v_0.

2) Exprimer v_n en fonction *n.* A partir de la définition de v_n, en déduire u_n en fonction de v_n puis finalement u_n en fonction de *n.*

ANNEXE de l'exercice 6